7) Ν.δ.ο

α) $e^x - 1 \le x e^x, \ \forall x \in R$

β) $e^{x-1} \ge 1 + \ln x, \ \forall x > 0$

ΛΥΣΗ

α) Θέτω $e^x - xe^x - 1 = f(x)$

$f'(x) = \cancel{e^x} - \cancel{e^x} - xe^x = -xe^x \quad \forall x \in R$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -xe^x = 0 \Rightarrow -x = 0$ ή $e^x = 0$ Αδύνατη

$\boxed{x=0}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Ο.Μ
$f(0)=0$

Άρα, Αφού ολ. ελάχιστο τότε

$f(x) \le f(0) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^x - 1 \le xe^x, \ \forall x \in R$

β) Θέτω $e^{x-1} - \ln x - 1 = g(x), \ \forall x > 0$

$g'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}, \ \forall x > 0 \Rightarrow g''(x) = e^{x-1} + \frac{1}{x^2} > 0 \ \forall x > 0$

• Άρα, αφού $g''(x) > 0 \Rightarrow g' \uparrow : (0, +\infty) \Rightarrow x > 1 \Rightarrow g'(x) > g'(1) = 0$

άρα $g'(x) > 0 \Rightarrow g \uparrow$

• $x < 1 \Rightarrow g'(x) < g'(1) = 0$

άρα $g'(x) < 0 \Rightarrow g \downarrow$

x	0	1	$+\infty$
g''	$+$		$+$
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$	Τ.Ε	$\nearrow$

Τοπ. ελαχ. ή ολικό ελαχ. το $g(1) = 0$ άρα

$g(x) \le g(1) = 0$

$\forall x > 0$

8) Δίνεται συνάρτηση $f(x)=2\ln x-2x+1$

α. f Μονοτονία - Ακρότατα

β. ΝΔΟ η $g(x)=2x\ln x-x^2-x$ είναι $\searrow$

ΛΥΣΗ

α. $A_f=(0,+\infty)$

$f'(x)=2\frac{1}{x}-2$

$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{x}-1=0 \Rightarrow \frac{1-x}{x}=0$, $\forall x>0$

$\Rightarrow \boxed{x=1}$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	Ο.Μ $f(1)=-1$	$\searrow$	

$f\nearrow:(0,1]$ και $f\searrow:[1,+\infty)$

ΟΛΙΚΟ ΜΕΓΙΣΤΟ ΤΟ $f(1)=-1$

β. $g'(x)=2\ln x+2-2x-1=2\ln x-2x+1=f(x)$

Όπου $f(x)\leq f(1)=-1$ αφού ολικό μέγιστο

Άρα $g'(x)\leq -1<0 \Rightarrow g\searrow:(0,+\infty)$

9) Έστω $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπους

$f(x)=e^{1-x}\cdot x$ και $g(x)=2\cdot\eta\mu x+(x-1)^2$

α. f,g Μονοτονία - ακρότατα

β. ΝΔΟ $e^{1-x}\cdot x-2\eta\mu x\leq (x-1)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$

ΛΥΣΗ

α. $f'(x)=e^{1-x}-x\cdot e^{1-x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=e^{1-x}(1-x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=0 \Rightarrow e^{1-x}=0$ ή $x=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	Ο.Μ $f(1)=1$	$\searrow$	

Άρα, $f(x)\leq f(1)=1$

$g'(x) = 2\cdot \sigma\upsilon\nu x + 2(x-1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$g''(x) = -2\eta\mu x + 2 = -2(\eta\mu x - 1)$

όπου $\quad -1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq \eta\mu x - 1 \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad 0 \leq -2(\eta\mu x - 1) \leq 4$

Αρα $\quad g''(x) \geq 0$ άρα η g' ↑

$g'(0) = 0$ άρα

- $x \leq 0 \Rightarrow g'(x) \leq g'(0) = 0 \Rightarrow g$ ↓ $: (-\infty, 0]$
- $x \geq 0 \Rightarrow g'(x) \geq g'(0) = 0 \Rightarrow g$ ↑ $: [0, +\infty)$

Αρα, στο $x_0 = 0$ παρουσιάζει ολ. ελάχιστο το $g(0) = 1$ και έτσι, $g(x) \geq g(0) = 1$

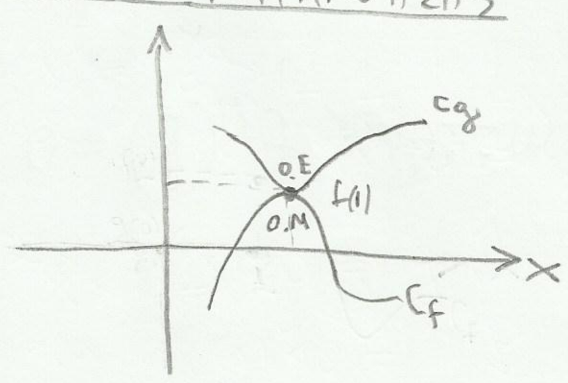
β. ΝΔΟ $\quad e^{1-x}\cdot x \leq 2\eta\mu x + (x-1)^2$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

ΔΗΛΑΔΗ, Αρκεί ΝΔΟ η C_g είναι πάνω από την C_f:
Αφού η $f(x)$ έχει ολ. Μεγ. το $f(1) = 1$ και η $g(x)$ έχει ολ. ελάχ το $g(0) = 1$ άρα θα ισχύει

$f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad$ όπου $\quad f(1) = g(0) = 1$

ΣΧΗΜΑ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ



11) Για $a \geq 0$ ισχυει οτι

$a^x \geq x+1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. ΝΔΟ $a=e$

ΛΥΣΗ

Θετω $f(x)=a^x-x-1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και $a \geq 0$

όπου $f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ τοπ. ελαχ. στο 0

$f'(x)= a^x \cdot \ln a - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και $a \geq 0$

Ισχύει ο fermat:

$f'(0)=0 \Rightarrow a^0 \cdot \ln a - 1 = 0 \Rightarrow \ln a = 1 \Rightarrow \boxed{a=e}$

Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ και $0 \leq x \leq 1$ ΝΔΟ

$$\alpha^x \cdot \beta^{1-x} \leq \alpha x + (1-x)\beta$$

ΛΥΣΗ

Θεωρώ

$$f(x) = \alpha^x \cdot \beta^{1-x} - \alpha x - (1-x)\cdot\beta$$

$$f'(x) = \alpha^x \cdot \log\alpha \cdot \beta^{1-x} + \alpha^x(-\beta^{1-x} \cdot \log\beta) - \alpha + \beta =$$

$$= \alpha^x \cdot \log\alpha \cdot \beta^{1-x} - \alpha^x \beta^{1-x} \cdot \log\beta - \alpha + \beta =$$

$$= (\alpha^x \beta^{1-x}) \log\frac{\alpha}{\beta} - \alpha + \beta, \quad \forall x \in [0,1]$$

$$f''(x) = (\alpha^x \cdot \log\alpha\, \beta^{1-x} - \alpha^x \cdot \beta^{1-x} \cdot \log\beta) \log\frac{\alpha}{\beta} =$$

$$= \alpha^x \cdot \beta^{1-x} \cdot \left(\log\frac{\alpha}{\beta}\right)^2, \quad \forall x \in [0,1]$$

Με $f''(x) > 0$, Άρα η $f' \uparrow$ και $f \cup$

- f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$
- f παραγωγ. στο (α, β)
- $f(0) = f(1) = 0$

$\Big\}$ Άρα από Θ. Rolle θα $\exists \xi \in (0,1)$:

$$f'(\xi) = 0$$

$$f''(x) > 0 \Rightarrow f' \uparrow \Rightarrow \begin{cases} f'(x) < 0, & 0 \leq x < \xi \Rightarrow f \downarrow \quad 0 \leq x \Rightarrow f(x) \leq 0 \\ f'(x) > 0, & \xi < x \leq 1 \Rightarrow f \uparrow \quad x \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq 0 \end{cases}$$

Επομένως $\quad f(x) \leq 0, \quad \forall x \in [0,1]$

$$\alpha^x \cdot \beta^{1-x} \leq \alpha x + (1-x)\beta, \quad \forall x \in [0,1]$$

Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\rho \geq 0$ και $\alpha, \beta > 0$

ΝΔΟ $|\alpha+\beta|^\rho \leq C_\rho \cdot (|\alpha|^\rho + |\beta|^\rho)$ όπου $C_\rho = \begin{cases} 1 & , \rho \leq 1 \\ 2^{\rho-1} & , \rho > 1 \end{cases}$

ΛΥΣΗ

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

$1^{ον}$) $\boxed{0 \leq \rho \leq 1}$ αρκεί νδο $|\alpha+\beta|^\rho \leq |\alpha|^\rho + |\beta|^\rho$

Τα $\alpha, \beta > 0$, Άρα αρκεί νδο $(\alpha+\beta)^\rho \leq \alpha^\rho + \beta^\rho \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)^\rho \leq 1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\rho$, θέτω $\boxed{x = \frac{\beta}{\alpha} > 0}$

$\Rightarrow (1+x)^\rho \leq 1 + x^\rho, \forall x > 0$

Θεωρώ $f(x) = (1+x)^\rho - 1 - x^\rho$

Εφαρμόζουμε ΘΜΤ στο $[0, x]$, $\forall x > 0$ με $f(0) = 0$ άρα θα $\exists \xi \in (0, x)$:

$: f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x} \Rightarrow x \cdot (\rho(1+\xi)^{\rho-1} - \rho \xi^{\rho-1}) = (1+x)^\rho - 1 - x^\rho \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot \rho((1+\xi)^{\rho-1} - \xi^{\rho-1}) = (1+x)^\rho - 1 - x^\rho$ ①

Με $1 + \xi > \xi \overset{0 \leq \rho \leq 1}{\Rightarrow} (1+\xi)^{\rho-1} < \xi^{\rho-1} \Rightarrow (1+\xi)^{\rho-1} - \xi^{\rho-1} < 0$

Άρα η σχέση ① θα είναι: $(1+x)^\rho - 1 - x^\rho < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (1+x)^\rho < 1 + x^\rho$.

$2^{ον}$) $\boxed{\rho > 1}$ αρκεί νδο $|\alpha+\beta|^\rho \leq 2^{\rho-1}(|\alpha|^\rho + |\beta|^\rho)$

Θεωρούμε $h(x) = |x|^\rho$, $\forall \rho > 1$

$x \geq 0$: $h(x) = x^\rho \Rightarrow h'(x) = \rho x^{\rho-1} \Rightarrow h''(x) = \rho^2 - \rho x^{\rho-2} > 0$

$x \leq 0$: $h(x) = (-x)^\rho \Rightarrow h'(x) = \rho(-x)^{\rho-1} \cdot (-1) \Rightarrow h''(x) = (\rho^2 - \rho)(-x)^{\rho-2} > 0$

Άρα, η h κυρτή συνάρτηση. Επομένως:

$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(\alpha) + f(\beta)) \Leftrightarrow \left|\frac{\alpha+\beta}{2}\right|^\rho \leq \frac{1}{2}(|\alpha|^\rho + |\beta|^\rho) \Leftrightarrow$

$|\alpha+\beta|^\rho \leq (|\alpha|^\rho + |\beta|^\rho) \cdot 2^{r-1}$